TEMA 5: INTEGRAL DEFINIDA

6/04/21

PARTICIÓN

Sea I un intervalo cerrado con extremos a, b, es un intervalo cerrado de longitud finita llamamos partición al conjunto finito de puntos $P = \{x_0, x_1, x_2 \dots x_n\}$ tales que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

el punto izquierdo coincide con el extremo izquierdo del intervalo, $a = x_0$ que es menor estricto que el sgte punto, es decir, son puntos crecientes en la recta real y el último punto de la partiø, x_n debe coincidir exactamente con el extremo derecho del intervalo, con b.

SUMA INFERIOR Y SUMA SUPERIOR

f(x) sea una funø acotada en un intervalo $I = [a, b]$ y P una partiø del intervalo

sean $M_k \rightarrow$ el supremo de los f(x) en c/u de los sub intervalos

$m_k \rightarrow$ el ínfimo de los f(x) en c/u de los sub intervalos

Sean
$$\begin{cases} M_k = \sup \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \\ m_k = \inf \{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \end{cases}$$

El valor + grande de f(x) en ese trozo

El valor + peq. de f(x) en ese trozo

SUMA INFERIOR DE f correspondiente a la partición P como la cantidad

$$L(P,f) \sum_{K-1}^{n} m_K (x_K - x_{K-1})$$

la suma de todos los m_K por la longitud de c/u de los subintervalos. Esa longitud puede ser distinta.

SUMA SUPERIOR de f correspondiente a la partición P como la cantidad

$$U(P,f) \sum_{K-1}^{n} M_K (x_K - x_{K-1})$$

INTEGRAL DEFINIDA

Definimos f integrable, función en un intervalo I cerrado, si verifica que: El supremo de la suma inferior de esta partición con respecto a esta función es igual al ínfimo de la suma superior.

Cuando sumo todos los valores menores y todos los valores mayores, si son iguales eso es lo que definimos como integral definida, entre a y b de la función f(x) diferencial de x.

$$\sup L(P,f) = \inf U(P,f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

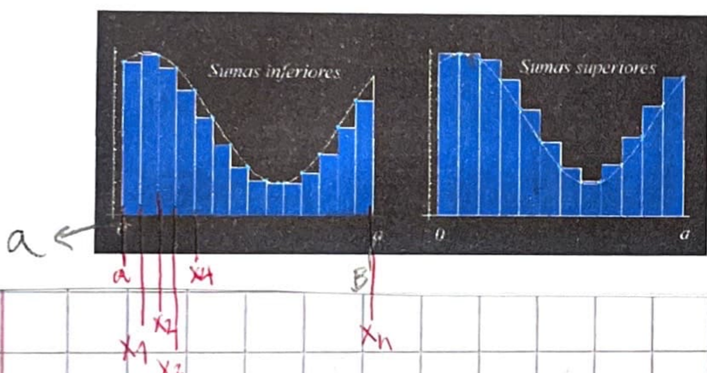
La integral definida es la noción de área bajo la curva $y = f(x)$ situada entre las rectas $x = a$ y $x = b$ (que son los extremos de mi intervalo).

La suma superior e inferior correspondientes a una partición P significan una aproximación mediante rectángulos al área bajo la curva $y = f(x)$

Interpretación geométrica

unir
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

- La integral definida es la noción del área debajo de la curva *y=f(x)* y situada entre las rectas *x=a* y *x=b*.
- La suma superior e inferior correspondientes a una partición *P* significan una aproximación mediante rectángulos al área bajo la curva *y=f(x)*



5

Tomo x_3 y x_4 (x ej.) y lanzo una recta desde x_3 hasta la función y desde x_4 hasta la función.

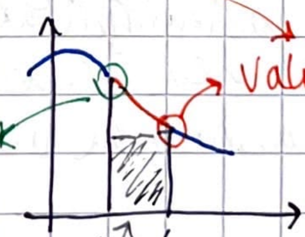
Para la suma inferior quiero el valor + peq. de la función en ese trozo. Entre x_3 y x_4, el valor + peq

Y el valor + grande se alcanza en x_3

De x_4 trazo línea paralela a eje x y me quedo con el rectang.

Calculo y sumo todas esas áreas

Valor + grande $f(x_3) = M_4$



Valor + peq. $f(x_4) = m_4$

Valor + peq. m_4 POR longitud intervalo $x_4 - x_3$. Y sumo todas esas areas = suma inferior respecto a esa partición de la función f.

Para la suma (figura derecha), me quedo entre X_3 y X_4 con el valor + grande y lanzo paralela a eje X hasta el sgte punto y sumo el valor del rectángulo.
valor + alto x longitud del intervalo

Sumo todos los rectángulos azules. Y eso es la suma superior respecto a esta partición de puntos de una función.

Sé que el área encerrada bajo la curva es más grande que la suma de todos los triángulos azules (queda un trozo sin sumar) y seguro sé que es inferior a el de las sumas superiores.

Hay que intentar adaptarse lo + posible a la curva. Puedo hacer una partición de la mitad de longitud de los intervalos. Si hago la mitad me acerco + a un de la suma superior e inferior.

En un paso al límite decimos: Si la suma inferior coincide con la suma superior no queda más remedio que ser exacta. el área encerrada bajo la curva.

La interpretación geométrica de una integral definida es el área encerrada x una curva en esos límites, de la integral definida.

Ejemplo

Hallar la suma superior y la suma inferior correspondiente a la func $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ para el intervalo $I = [-1, 2]$ y la partición del mismo $P = [-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2]$

Como tiene un valor absoluto, hay q escribir la func de esta forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Como estamos en el intervalo $[-1, 2]$, del -1 al 0 usaremos la primera rama y en el caso positivo la 2ª rama.

¿Es continua la func?

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 + 2x + 1 = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} x^2 - 2x + 1 = 1$$

- El lim cuando x tiende a 0 existe y vale 1
- $f(0) \to$ se toma en la 2ª rama

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Estamos ante una func continua

¿Es derivable? Se comprueba con derivadas laterales.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(h^2 + 2h + 1) - 1}{h} = \frac{h^2 + 2h}{h} = \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} = \frac{h+2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{(h^2 - 2h + 1) - 1}{h} = \frac{h^2 - 2h}{h} = \frac{h-2}{1} = -2$$

Cortes con los ejes = Igualamos a 0

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_1 = -1$
$x_2 = 1$ $\Big\rangle$ corta a eje x en -1 y 1

$f(0) = 1 \rightarrow (0, 1)$ luego en el $(0,1)$ tb. hay un corte

Monotonía

Primera derivada → hemos visto que era una func derivable menos en el 0.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si 1ª derivada $f'(x) > 0$ f es creciente

Si 1ª derivada $f'(x) < 0$ f es decreciente

$2x + 2 > 0$ $\quad 2x > -2$ $\quad x > -1$ Crece hasta $x = 0$

$2x - 2 > 0$ $\quad 2x > 2$ $\quad x > 1$ Crece, luego $x < 1$ decrece hasta $x = 0$

Extremos locales 1ª derivada igual a 0

$2x + 2 = 0$ $\quad 2x = -2$ $\quad x = -1$
$2x - 2 = 0$ $\quad 2x = 2$ $\quad x = 1$

y tengo los extremos locales en 1 y -1
Puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$

MINIMOS → los puntos son minimos porque calculo la segunda derivada

$f''(x)=2$ } 2 es mayor que 0
$\quad\quad 2$

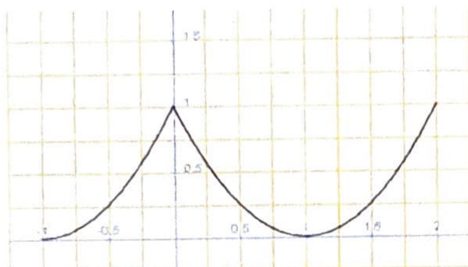
↓

Es la primera derivada NO NULA de orden par positiva indica si puntos son mínimos.

Ejemplo1

unir
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si\ x<0 \\ x^2-2x+1 & si\ x\geq 0 \end{cases}$$



9

Una vez representada la func tenemos la partic, que nos la han dado

$P=[-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2]$

$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$
$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$

	$[-1, -1/2]$	$[-1/2, 0]$	$[0, 1/2]$	$[1/2, 1]$	$[1,2]$
M	$f(-1/2)=1/4$	$f(0)=1$	$f(1/2)=1/4$	$f(1/2)=1/4$	$f(2)=1$
m	$f(-1)=0$	$f(-1/2)=1/4$	$f(1/2)=1/4$	$f(1)=0$	$f(1)=0$

$1^2-2\cdot 1+1=0$

$(-0{,}5)^2+2\cdot(-0{,}5)+1=1/4$

Con la tabla hecha puedo calcular la suma superior y la suma inferior

Suma superior: sumar desde $K=1$ hasta $K=5$, que son los puntos que tengo en la partición (6 puntos, 5 intervalos)

$$P = [-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 2]$$

de el valor máximo de 4 subintervalo x la longitud del subintervalo

(1) • Entre x_1 y x_2, ¿Cuál es el valor max? 1/4
(2) • ¿Cuánto vale la longitud? Entre 1 y 1/2 hay 1/2
la longitud es siempre positiva

MÁS

↓

Seguir igual (1) y (2)

$$U(P,f) = \sum_{K=1}^{5} M_K (x_K - x_{K-1}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot 1$$

$$\frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

Esto es el área y es un área por exceso. Es decir, sabemos que la curva entre -1 y 2 es MENOR que $\frac{9}{4}$

Suma inferior: las longitudes son las mismas, sólo tengo que cambiar las M mayúsculas por las m minúsculas.

$$L(P,f) = \sum_{K=1}^{5} m_K (x_K - x_{K-1}) = 0\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 1 = \frac{1}{4}$$

Este es un área por defecto. El área encerrada entre -1 y 2 de la función $f(x)$ es MAYOR que $\frac{1}{4}$.

Mi area vale entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{9}{4}$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

4) $\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \int_a^b f(x)\,dx$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ si $c \in [a, b]$

INTEGRALES INMEDIATAS

1) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad n \neq -1$

2) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

3) $\int e^x\,dx = e^x + C$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{La} + C$

5) $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

6) $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

7) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$

REGLA DE BARROW

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es una func continua en [a,b] y G es una primitiva de f * ($\forall t\ G'(t) = f(t)$)

$$\int_a^b f(s)\,ds = G(b) - G(a)$$

Si encuentro una primitiva de esta func, es decir, una integral de esta func indefinida, para hacerla definida simplemente tengo que hacer primitiva del extremo superior menos G del extremo inferior.

Me puedo olvidar de que son integrales definidas, la puedo operar como una integral indefinida y cuando termine sustituyo el valor en la nueva func que obtengo, porque cdo integro una func obtengo otra nueva func y tengo q sustituir en esa func el valor del extremo superior menos el valor del extremo inferior.

ÁREA BAJO UNA CURVA POSITIVA

Cuando tengo una func f(x) ya sabemos que puedo hacer particiones mediante rectangulos, calcular suma inferior, superior, un paso al límite y con eso calcular el valor del área. Pero tb. hay otra forma. Que es calcular esta integral.

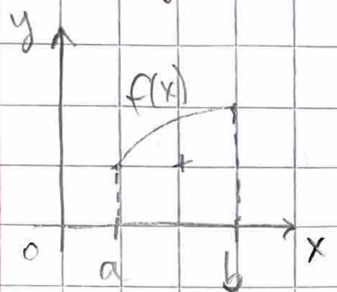
$$\text{Área } R = \int_a^b f(x)\,dx$$

---

* G es una primitiva si la derivada de G es f, para todo t, es decir, en cada uno de los puntos

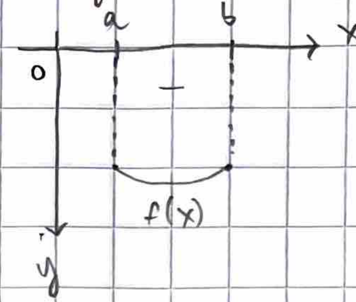
Como es área, hablamos de unidades al cuadrado.

Área bajo curva positiva



$$\text{Área } R = \int_a^b f(x)\,dx$$

Área bajo curva negativa



$$\text{Área} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

menos integral. Ojo no hay áreas negativas.

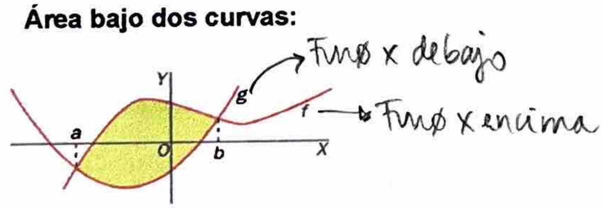
AREAS DE RECINTOS PLANOS

- Area bajo dos curvas

Áreas de recintos planos

unir
UNIVERSIDAD
INTERNACIONAL
DE LA RIOJA

Área bajo dos curvas:



$$\text{Área } R = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

17

Tengo 2 curvas, g y f. Tienen trozos positivos y negativos. Quiero calcular el área encerrada entre esas 2 curvas (parte verde).
Y eso será el área encerrada entre a y b, la integral definida entre a y b de la función que esté x encima MENOS la función que esté por debajo.

- Longitud de arco Es la longitud de esa curva, se calcula con la formula:

Aplicaciones

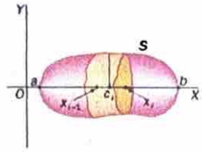
UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DE LA RIOJA

Longitud de arco:

$$L_a^b = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Volúmenes de sólidos generales:

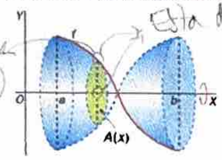
$$V = \int_a^b A(x)dx$$



Volúmenes de sólidos de revolución

$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)dx$$

Esta altura es f(x)



Esta distancia es el radio.

$\pi r^2 = \pi \cdot f^2(x)$

18

VOLUMEN DE SÓLIDOS GRALES

Si quiero calcular un volumen, es un paso a una dimensión más. En la figura rosa, por ej. voy haciendo "rebanadas" y calculo el área de cada rebanada y las sumo, tendré la figura completa. Integro desde a a b y de las rebanadas de pan.

Una integral no es más que una suma.

VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Cojo una curva y la giro respecto de un eje. El volumen es la integral entre a y b de el área de una de las secciones.

El área aquí es + fácil porque es $\pi \cdot r^2$ porque es un círculo.

Ejemplo 2

Se considera la func $f(x) = x^2$ definida en el intervalo $I = [0, 3]$ y para cada natural n se toma la partición de dicho intervalo formada como sigue

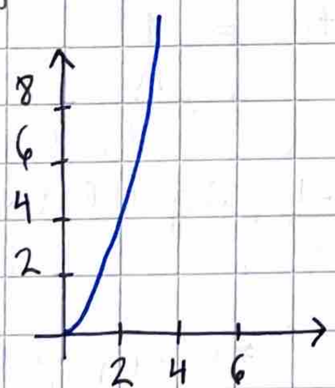
$$P_n = \left\{ X_K = \frac{K}{n} \;/\; 0 \leq K \leq 3.n \right\}$$

Estudiar suma superior e inferior correspondiente a cada partición P_n y hallar de esta forma mediante un paso al límite el área comprendida entre la curva y el eje OX

Si K vale 0, la escribo...

$$P_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots \frac{3n-1}{n}, \frac{3n}{n} = 3 \right\}$$ ← Se cubre todo el intervalo $[0, 3]$

Dibujo la func entre 0 y 3



En el intervalo $[0, 3]$ es creciente

Hago la derivada

$f'(x) = 2X$

$2x$ entre 0 y 3 es siempre positivo ∴ es una func creciente.

Si calculo las sumas superiores, primero calculo la longitud entre X_K y X_{K-1}, entre 2 puntos de la partición

$$P_n \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, L \ldots \frac{3n-1}{n}, \frac{3n}{n} = 3 \right\}$$

entre $\frac{2}{n}$ y $\frac{1}{n}$ la longitud es $\frac{1}{n}$

entre $\frac{3n}{n}$ y $\frac{3n-1}{n}$ la longitud es $\frac{1}{n}$

lo hacemos genérico para todos los puntos

$$U(P_n, f) = \sum_{K=1}^{n} M_K (x_K - X_{K-1})$$

$$X_K - X_{K-1} \Rightarrow \frac{K}{n} - \frac{K-1}{n} = \frac{K-K+1}{n} = \frac{1}{n}$$

entre un pto $\frac{K}{n}$ y el pto anterior $\frac{K-1}{n}$, ¿qué longitud hay?

$$\frac{K}{n} - \frac{K-1}{n} = \frac{1}{n}$$

* las longitudes son positivas

¿Cuánto vale el M_K? Sumas superiores para cada uno de los subpuntos de la partición.
¿Dónde alcanzamos el M_K? ¿en $\frac{2}{n}$ o $\frac{3}{n}$?

En $f\left(\frac{3}{n}\right)$ porque es una función creciente.

Decimos que

$$M_K = \max\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} \Rightarrow x_k = \frac{K}{n} \Rightarrow f(x_k) = \left(\frac{K}{n}\right)^2$$

M_K es el máximo .... siempre se alcanza en el $f(x_k)$

y el $f(x_k)$. x_k es de la forma $\frac{K}{n}$, como la func es igual a x^2 cuando lo meto en la func tengo $\left(\frac{K}{n}\right)^2$.

Ya tengo lo que vale cada longitud entre 2 puntos de mi partic y tengo lo que vale el M_K para cada uno de los puntos subintervalos de la partic.

Ahora tengo que hacer el sumatorio.

$$U(P_n, f) = \sum_{K=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{K=1}^{3n}\left(\frac{K}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{3n(3n+1)(6n+1)}{6}$$

Es la suma de los M que hemos visto que valen $\left(\frac{K}{n}\right)^2$ por la longitud, que es $\frac{1}{n}$

Si tomamos el límite, cuando hacemos que n tienda a infinito (Tengo un montón de puntos, pero incluso haré que n tienda a infinito)

¿?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9n^3}{n^3} = 9 = U(P, f)$$

Regla Barrow

Para la suma inferior, la longitud es la misma $\frac{1}{n}$

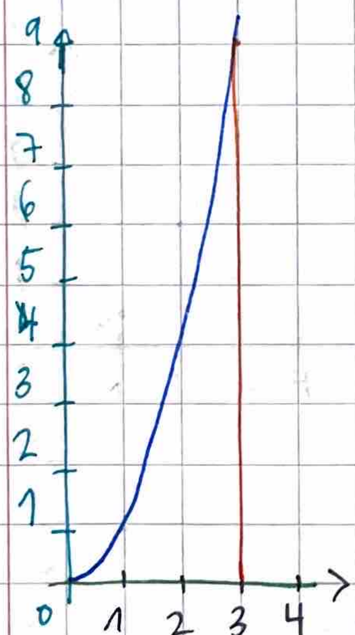
$$L(P_n,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$ tomando el límite → 9

el valor de los m se alcanza en el $\left(\frac{k-1}{n}\right)^2$, tomando el límite, sale 9.

Como 9 es el valor de la suma inferior es igual al de la suma superior, la integral entre 0 y 3 de x^2 diferencial de x vale 9.

$$9 = L(P_n,f) \le U(P_n,f) = 9 \Rightarrow \int_0^3 x^2\,dx = 9$$

→ otra forma de resolver



¿Cómo calculo la integral de esa área? Integral del 0 hasta 3... como es solo un área positiva no hago la de arriba menos la de abajo, si se quiere la de abajo, como es x=0 se pone x^2-0, es decir, la de arriba solamente.

Con lo que no hay más que calcular la integral y la integral, como ya hemos visto x^n era $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, por lo tanto aquí será

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$$

Regla de Barrow: Una vez que tengo una primitiva de esta función sustituyo el valor del extremo superior, que

* Particiones no es necesario controlar. FT internas

será $\frac{x^3}{3}$ MENOS el valor del extremo inferior, que será $\frac{0^3}{3}$
por lo tanto, esto sale que es 9.

TEMA 6: INTEGRAL INDEFINIDA 15/04/21

PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN:

La función F(x) es una func primitiva de otra func f(x) si la derivada de la F es f(x)

$$F(x) \text{ primitiva } f(x) \leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Si F(x) es primitiva de f(x), entonces todas las funciones F(x) + C que pueda construir dando valores a C, también serán primitivas de f(x).
Si derivo F(x) + C, la derivada de una constante es 0, con lo que queda F(x).

Encontrar una primitiva es encontrar una familia de funciones primitivas. Porque son infinitas y porque la constante puede tener infinitos valores.

Cuando hablemos de integrales indefinidas, no definidas, que no tengan intervalo, cuando pongamos la respuesta siempre pondremos + C o + K (de constante).

INTEGRAL INDEFINIDA: Es el conjunto formado por todas las primitivas.
Cuando integro f(x) es buscar una primitiva + constante

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$